

prodotto scalare su $V_n(\mathbb{K})$

$$\cdot : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

è una forma bilineare simmetrica.

In particolare dato un prodotto scalare $\cdot$ e

fissata una base $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$

esiste sempre una matrice B tale che chiamati

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ i vettori delle componenti}$$

$$\text{di } \bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = {}^t X B Y$$

$$\text{e } B = {}^t B.$$

prodotto scalare è non degenere e

$$\forall \bar{x} \in V_n(1k) \exists \bar{y} \in V_n(1k) : \bar{x} \cdot \bar{y} \neq 0 \\ \bar{x} \neq \underline{0}$$

è degenere se

$$\forall \bar{x} \exists \bar{y} \in V_n(1k) : \forall \bar{y} \in V_n(1k) : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$$

N.B. Se poniamo $\text{Rad}(\cdot) := \{ \bar{x} \mid \forall \bar{y} \in V_n(1k) : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \}$.
questo è un sotto spazio di $V_n(1k)$.

→ prodotti scalari non degeneri.

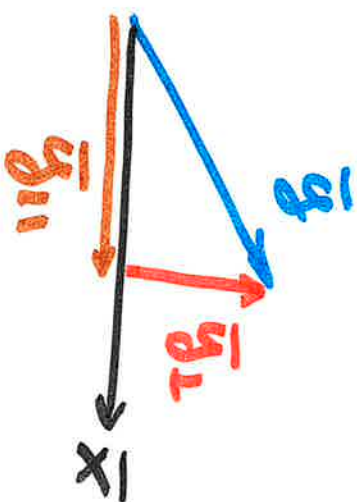
Siano $\bar{x}, \bar{y} \in V_n(1k)$ si dice che $\bar{x}$ è ortogonale ad $\bar{y}$
(rispetto un prod. scalare $\cdot$) se $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ ed in
simboli si scrive $\bar{x} \perp \bar{y}$ $\perp$ = "perp"

$\bar{x}$ è isotropo $\Leftrightarrow \bar{x} \perp \bar{x}$ e $\bar{x} \neq 0$

Teorema: Sia $\cdot$ un prod. scalare non degenerato,
 $\bar{x} \in V_n(1k)$ un vettore anisotropo
 (cioè $\bar{x} \cdot \bar{x} \neq 0$) ed $\bar{y} \in V_n(1k)$.

Allora $\exists!$ $\bar{y}_{||}$ ed $\bar{y}_{\perp} \in V_n(1k)$ tali che

$$\begin{cases} \bar{y} = \bar{y}_{||} + \bar{y}_{\perp} \\ \bar{y}_{||} \in L(\bar{x}) \\ \bar{y}_{\perp} \cdot \bar{x} = 0 \end{cases}$$



Il vettore $\bar{y}_{||}$ è detto

in $\bar{x}$.

Proiezione ortogonale di $\bar{y}$

Def: $\bar{y}_{||} := \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \bar{x}$

$\bar{y}_{\perp} := \bar{y} - \bar{y}_{||}$

$\bar{y}_{\perp} \cdot \bar{x} = \bar{y} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \bar{x} \cdot \bar{x} = 0$

□

Def. Un vettore $\bar{x} \in V(lk)$ è detto vettore se

$$\bar{x} \cdot \bar{x} = 1$$

Se $\bar{y} \in V(lk)$ si può sempre trovare un vettore $\bar{x}$ tale che $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$? DIPENDE DA lk e dal prod. scalare.

1) Se $\bar{y} \cdot \bar{y} = 0$ cioè $\bar{y}$ isotropo $\Rightarrow \forall \bar{x} \in l(\bar{y})$ abbiamo $\bar{x} = \alpha \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = \alpha^2 \bar{y} \cdot \bar{y} = 0.$

$\Rightarrow$ NO

2) Supponiamo $\bar{y}$ ANISOTROPO $\Rightarrow$ ci serve $\bar{x} = \alpha \bar{y}$ tale che $\alpha \neq 0$ $\bar{x} \cdot \bar{x} = \alpha^2 \bar{y} \cdot \bar{y} = 1$ MA QUESTO IMPICA

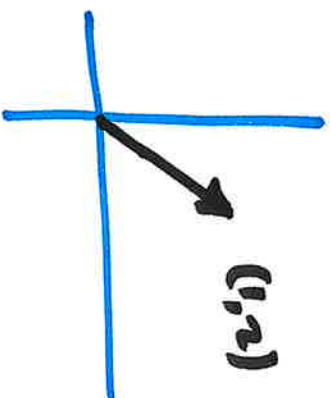
$$\bar{y} \cdot \bar{y} = \alpha^{-2} \Rightarrow \bar{y} \cdot \bar{y} \text{ deve essere un quadrato in } lk.$$

In $V(lk)$

prendiamo come prod scalare

$$(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$$

$$\bar{y} = (1, 2) \quad \bar{y} \cdot \bar{y} = 5$$



- Def: Una sequenza di vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ è detta
- ortogonale se $\forall i, j: \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ se $i \neq j$.
 - ortonormale se $\forall i, j: \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

I vettori di una sequenza ortonormale sono autosimili

Oss: Sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ una sequenza di vettori ortonormale. Allora $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ è libera.

Dim: Supponiamo $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k = \underline{0} \Rightarrow \forall \bar{e}_i$

$$\bar{e}_i \cdot (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k) = \bar{e}_i \cdot \vec{0} = 0$$

"

$$\alpha_1 (\underbrace{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_1}_{=0}) + \dots + \alpha_i (\underbrace{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i}_{=1}) + \dots + \alpha_k (\underbrace{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k}_{=0}) = \alpha_i$$

$$\Rightarrow \forall i: \alpha_i = 0$$

□

oss 2:

Sia $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$ ortonormale.

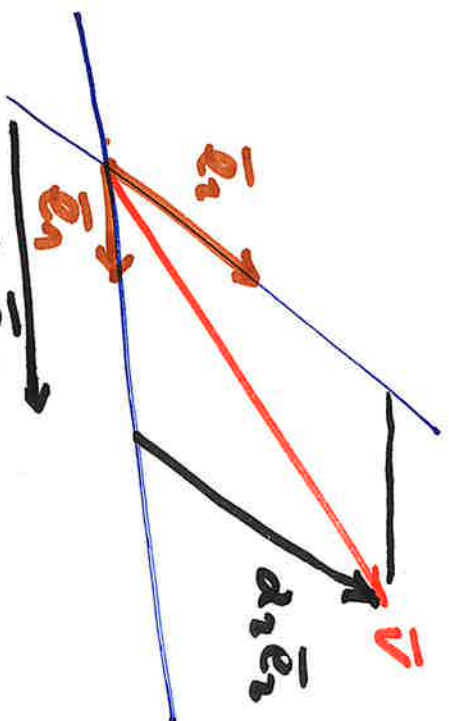
Allora 1) Il prod. scalare ha come matrice identità o B la matrice identità.

$$\Rightarrow (x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$2) \forall \vec{v} = \sum y_j \bar{e}_j \in V_n(\mathbb{K})$$

$$v_i = \bar{e}_i \cdot \vec{v}$$

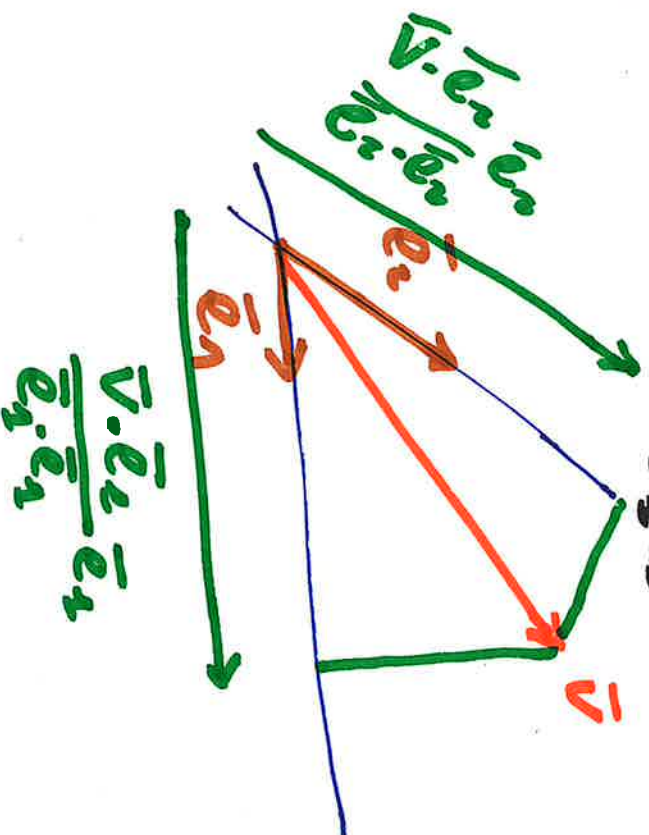
⚠ $v_i = \bar{e}_i \cdot \bar{v} \Leftrightarrow$ la base è ortogonale.

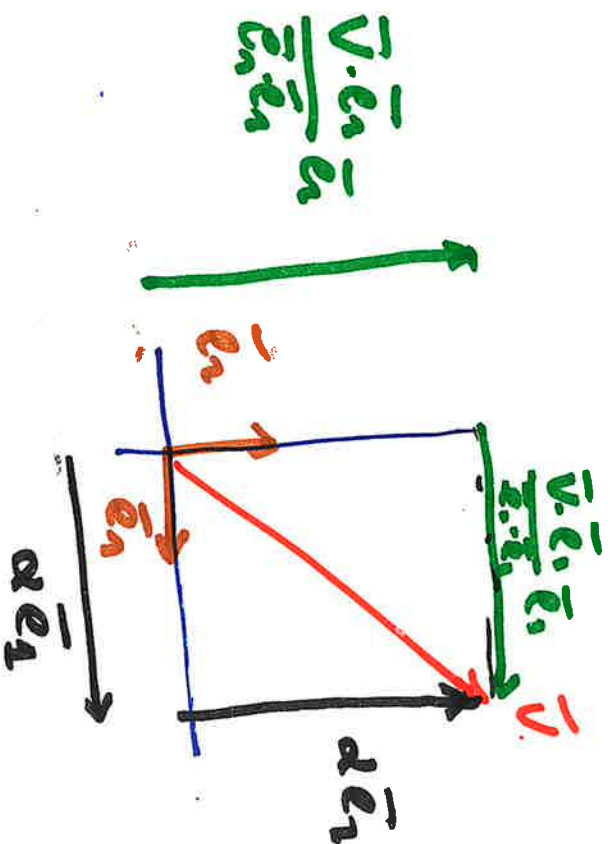


Le componenti di $\bar{v}$ rispetto $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ sono (d_1, d_2) .

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \neq d_1$$

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \neq d_2$$





Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Supponiamo che l'unico vettore $\vec{x}$ di $V_n(k)$ tale che $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ sia $\vec{0}$ e sia $B_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ una base (o comunque una sequenza libera di vettori di $V_n(k)$).

→ vogliamo una sequenza libera di vettori di $V_n(k)$ $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ortogonale e tale che $V = \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \rangle$.

$$\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_j) = \mathcal{L}(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_j).$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \bar{e}'_1 \\ \bar{e}_1 \end{array} \dots \begin{array}{c} \swarrow \bar{e}'_j \\ \bar{e}_j \end{array}$$

construimos $B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ passo/passo.

$$\bar{e}'_1 \leftarrow \bar{e}_1$$

$$\bar{e}'_2 \leftarrow \bar{e}_2 - \bar{e}_1 \bar{e}'_1 = \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}'_1}{\bar{e}'_1 \cdot \bar{e}'_1} \bar{e}'_1$$

AD OGNI VETTORE SOTTRAIAMO LE SUE PROIEZIONI

SUI VETTORI PRECEDENTI GIÀ OTTENUTI.

$$\bar{e}'_i \leftarrow \bar{e}_i - \sum_{j < i} \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j}{\bar{e}'_j \cdot \bar{e}'_j} \bar{e}'_j \quad \text{per } 1 \leq i \leq n.$$

N.B. $\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j = \bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j - \sum_{k < i} \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_k}{\bar{e}'_k \cdot \bar{e}'_k} \bar{e}'_k \cdot \bar{e}'_j =$

$$= \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j' - \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j' \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i'}{\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j' \bar{e}_j \cdot \bar{e}_j'} = 0 \quad \square$$

Se tutti hanno i prodotti scalari $\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'$ non
quadrati in $\mathbb{K} \Rightarrow$ possiamo anche normalizzare
 la base $\rightarrow$ otteniamo $B'' = (\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_n'')$
 con $\bar{e}_i'' \leftarrow \frac{\bar{e}_i'}{\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}}$

B'' è una base ortonormale.

Oss: La matrice di "..." rispetto una base
 ortonormale è la matrice identità
 • ~~ovviamente~~ è una matrice diagonale
 ortonormale

Def In $\mathbb{K}^n$ si dice prodotto scalare standard il prod. scalare che ha come matrice rappresentativa I rispetto la base canonica.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \tilde{X} \cdot y$$

Def: Sia $\bar{x} \in V_n(\mathbb{K})$. Poniamo

$$\bar{x}^\perp := \{ \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \}.$$

$\bar{x}$ ortogonale
 $\bar{x}$ prop.

• Se $X \subseteq V_n(\mathbb{K})$. Poniamo

$$X^\perp := \{ \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) \mid \forall \bar{x} \in X : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \} = \bigcap_{\bar{x} \in X} \bar{x}^\perp$$

Propositione

- 1) $\bar{x}^\perp \leq V_n(K)$
- 2) $X^\perp \leq V_n(K)$
- 3) $y \in X \Rightarrow X^\perp \subseteq y^\perp$
- 4) ~~X~~ $\mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$
- 5) $X \subseteq X^{\perp\perp}$
- 6) Se "1" non degenerate (i.e. $\text{Rad}(\cdot) = \{0\}$)
 $\Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.

Dim: 1) Siauo $\bar{y}, \bar{z} \in \bar{x}^\perp$ e $\alpha, \beta \in K \Rightarrow$

$$(\alpha \bar{y} + \beta \bar{z}) \cdot \bar{x} = \alpha(\bar{y} \cdot \bar{x}) + \beta(\bar{z} \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow X^\perp \leq V_n(K)$$

2) $X^\perp$ è intersezione di sottospazi $\Rightarrow$ è sottospazio

$$3) \text{ Sei } y \in X \text{ u. } \bar{z} \in X^\perp \Rightarrow \forall x \in X: \bar{z} \cdot \bar{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \bar{y} \in Y: \bar{y} \cdot \bar{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{z} \in Y^\perp \Rightarrow X^\perp \subseteq Y^\perp$$

$$4) X \subseteq L(X)^\perp \Rightarrow L(X)^\perp \subseteq X^\perp$$

$$\text{Annahme } \bar{z} \in X^\perp \Rightarrow \forall \bar{x} \in X: \bar{z} \cdot \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow \forall \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in X \quad \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}$$

$$\bar{z} \cdot (a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n) =$$

$$= a_1 \bar{z} \cdot \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{z} \cdot \bar{x}_n = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} \in L(X)^\perp \Rightarrow X^\perp \subseteq L(X)^\perp$$

$$\Rightarrow X^\perp = L(X)^\perp$$

$$5) X \subseteq X^{\perp\perp} \text{ in fakt. ma } \forall \bar{y} \in X^\perp \text{ m\u00f6\u00dfe da } \bar{y} \cdot \bar{x} = 0 \quad \forall \bar{x} \in X$$

quindi anche $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \quad \forall x \in X$ e dunque

$$\forall \bar{x} \in X \quad \bar{x} \in Y^\perp \Rightarrow \bar{x} \in (X^\perp)^\perp \Rightarrow X \subseteq X^{\perp\perp}.$$

$$6) \mathcal{L}(X) = X^{\perp\perp} \text{ e } \ker(\cdot) = \{0\}.$$

cioè se fissata una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ abbiamo che la matrice $\mathcal{B}$ del prod. scalare ha $\det(\mathcal{B}) \neq 0$.

vediamo come si ottiene $X^\perp$.

Immagini tutto per quanto visto prima $X^\perp = \mathcal{L}(X)^\perp$

quindi possiamo prendere una base $\mathcal{Y}$ dello sp. vettoriale generato da X e scrivere $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)^\perp = \mathcal{L}(Y)^\perp = Y^\perp$.

Fissiamo poi una base di $V_n(k)$ e sia B la matrice del prodotto scalare e $y_1 \dots y_k$ le componenti dei vettori di Y rispetto a B more per noi

$$Y^\perp = \{ Z : y_1 B Z = 0, y_2 B Z = 0 \dots y_k B Z = 0 \}.$$

chiamo A la matrice con righe $y_1 \dots y_k$

$$\Rightarrow Y^\perp = \{ Z : (AB)Z = \underline{0} \}.$$

$$\det(B) \neq 0 \Rightarrow \text{rk}(AB) = \text{rk}(A) = k$$

$$\Rightarrow \dim Y^\perp = \dim \ker(AB) = n - k$$

$$\dim(Y^{\perp\perp}) = n - \dim Y^\perp = n - (n - k) = k =$$

$$= \dim \mathcal{L}(X) \Rightarrow \dim(X^{\perp}) = \dim(Y^{\perp}) = \dim \mathcal{L}(X)$$

Supponiamo:

$$\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}(X) = X^{\perp}}$$

□

$K = \mathbb{R}$ ci interessano prodotti scalari eucledei

Comunque dato un prodotto scalare "... anche una forma quadratica associata ad esso.

$$q: \{V_n(K) \rightarrow K \\ \bar{x} \rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x}$$

N.B. Data q. come sopra, nell'ipotesi $1 \neq -1$ (eq. 2 $\neq 0$)

da q si ricostruisce il prod. scalare.

$$\begin{aligned} q(\bar{x} + \bar{y}) &= (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} \\ &= q(\bar{x}) + 2 \bar{x} \cdot \bar{y} + q(\bar{y}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{2} (q(\bar{x} + \bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})).$$

Prod. scalare su $\mathbb{R}$ è detto eucideo se esso è

definito: $\forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \bar{x} \cdot \bar{x} \neq 0 \text{ se } \bar{x} \neq \underline{0}$

positivo: $\forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \quad (\text{cioè } q(x) \geq 0)$

$$\boxed{\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \text{ e } \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}}$$

Oss: Se " $\cdot$ " è definito positivo $\Rightarrow$ q/s funzioni sempre

e si può anche sempre normalizzare
perché i numeri reali non negativi sono
tutti quadrati in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists$ sempre una base di $V_n(\mathbb{R})$ rispetto
cui un prod. scalare euclideo è rappresentato
dalla matrice identica. e dunque rispetto
questa base è il prod. scalare standard.

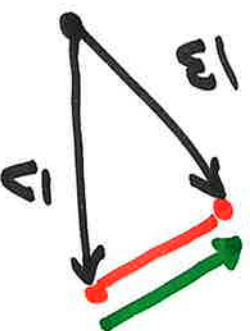
COROLLARIO: Sia B matrice di un prod. scalare
definito positivo $\Rightarrow \exists A \in GL(n, \mathbb{R})$ tale
che ${}^TABA = I$.

Sia " " un prod. scalare definito positivo

Def : Si dice norma indotta da " " la funzione

$$\|\cdot\| := \{V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \bar{x} \rightarrow \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}\}$$

Spazio vet. metrico = Sp. vettoriale con
nozione di distanza



Sp. vettoriali
con prod.
scalare d.p.

Sp. vettoriali $\subseteq$ Sp. vettoriali
 $\subseteq$ normali: $\subseteq$ metrici.

prod. scalare $\therefore \rightarrow \|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$

Def. Si dice norma una funzione $\|\cdot\|: V(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
tale che

- 1) $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in V(\mathbb{R})$,
- 2) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}$
- 3) $\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$
- 4) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

dis. triangolare